TD M5 - Moment cinétique

M1 - Patinage artistique

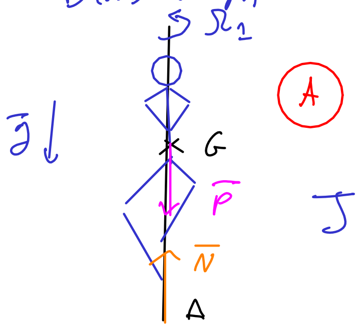
Observations : quand le patineur écarte ses bras, sa vitesse de rotation ↘ (1)
〃 〃 ramène ses bras vers le corps sa vitesse de rotation diminue. (2)

(1) : Moment cinétique / axe de rot $J_\Delta \nearrow$

(2) 〃 〃 $J_\Delta \searrow$

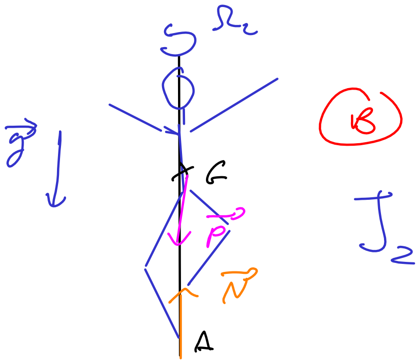
Interprétation :

Bras rapprochés



J_1

Bras écartés



$J_2 > J_1$

Syst : patineur

Réf : patinoire, galiléen.

BDF : - poids $\vec{P}$

- réaction normale $\vec{N}$

- frottements négligés

Th du moment cinétique appliqué au patineur.

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})}_{0} + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{N})}_{0} \Rightarrow L_\Delta = \text{cste}$$

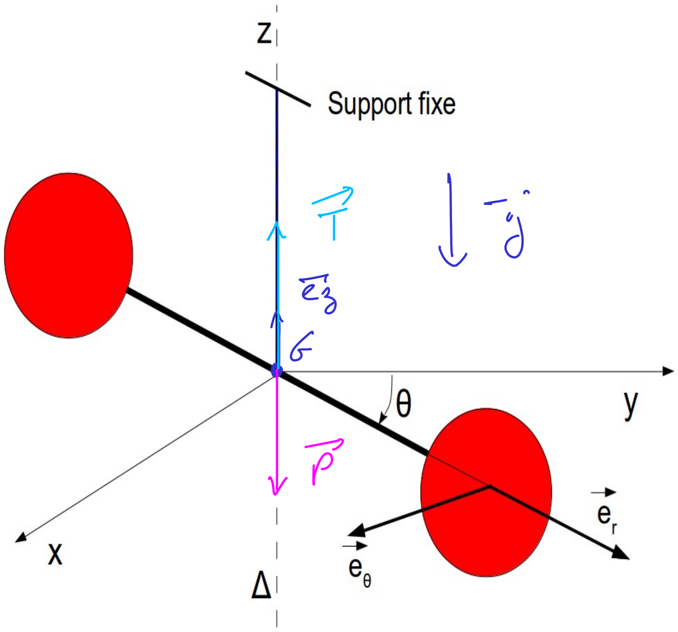
En (A) : $L_\Delta = J_1 \Omega_1$

En (B) : $L_\Delta = J_2 \Omega_2$

or $J_1 \Omega_1 = J_2 \Omega_2 \Rightarrow \Omega_2 = \Omega_1 \times \frac{J_1}{J_2}$

or $J_2 > J_1 \Rightarrow \boxed{\Omega_1 > \Omega_2}$

M2 - Pendule de torsion



Syst : {tige + masselottes}

Réf : labo, galiléen.

Bilan des actions mécaniques

— poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P})}_{\underbrace{\vec{GG} \wedge \vec{P}}_{\vec{0}}} \cdot \vec{e_z}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$$

— tension $\vec{T} = T\vec{e_z}$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T})}_{} \cdot \vec{e_z}$$

$$\underbrace{(\vec{GG} \wedge \vec{T})}_{\vec{0}} \cdot \vec{e_z}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$$

— effet de liaison :

$$\mathcal{M}_{\Delta, liaison} = -C\theta$$

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ :

$$\left.\frac{dL_\Delta}{dt}\right|_{R} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_{\Delta, liaison} \quad (*)$$

avec $L_\Delta = J\dot{\theta}$, J cst

$$(*) \quad J\ddot{\theta} = -C\theta \iff \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{C}{J}}_{\omega_0^2}\theta = 0 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

O.H ! de pulsation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}}$$

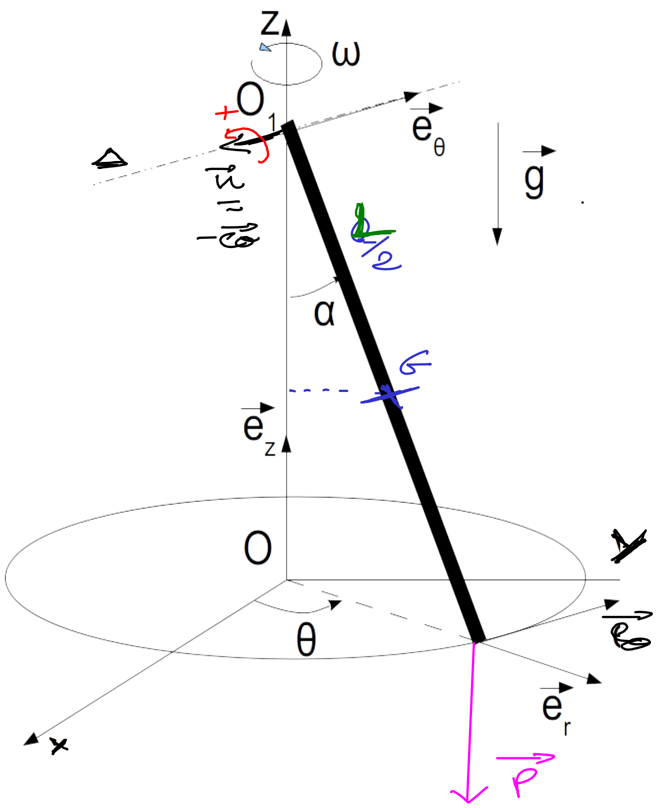
Déterminons C : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} \Rightarrow C = J\omega_0^2$.

avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $J = 2m\left(L^2 + \frac{a^2}{5}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{C = 2m\left(L^2 + \frac{a^2}{5}\right) \times \frac{4\pi^2}{T_0^2}}$$

A.N. : $m = 1\,kg$, $L = 0{,}20\,m$, $a = 0{,}03\,m$, $T_0 = 0{,}5\,s$ } $C = 12{,}7\ N.m$

M3 - Le pendule conique



1/ $\vec{O_1G} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \frac{\ell}{2}$

2/ Pendule pesant.

Σ = tige

Réf = $\mathcal{R}$, labo, galiléen.

BDF : base de travail $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

- poids $\vec{P}$:

 * $\vec{P} = m\vec{g} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

 * $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = (\vec{O_1G} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}$

$= mg\frac{\ell}{2} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cancel{0} \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= mg\frac{\ell}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})} \cdot \vec{u}$.

$= -mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha \, \vec{u} \cdot \vec{u}$

$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha}$

si $\alpha > 0$, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) < 0$
↪ tend à faire tourner la tige ds le sens horaire

- Effort de liaison : liaison pivot d'axe Δ parfaite $\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta, \text{liaison}} = 0$

TMC/Δ appliqué ds $\mathcal{R}$ à Σ :

$\left.\frac{dL_\Delta(\Sigma)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \cancel{\mathcal{M}_{\Delta,\text{liaison}}} + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})}_{-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha}$.

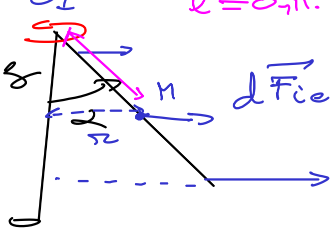
avec $L_\Delta(\Sigma) = J_\Delta\dot{\alpha}$, avec $J_\Delta = \frac{1}{3}m\ell^2 = \text{cte}$

$\Rightarrow \frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\ddot{\alpha}$

D'où : $\underbrace{J}_{\frac{1}{3}m\ell^2}\ddot{\alpha} + mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha = 0 \iff \boxed{\ddot{\alpha} + \omega_0^2\sin\alpha = 0}$

oscillateur anharmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

2/ $\omega \neq 0$.



$\ell = O_1M$.

$d\vec{F}_{ie} = dm\, r\omega^2\, \vec{e_r} = \frac{m}{\ell} \times d\ell \times \ell\sin\alpha\,\omega^2\,\vec{e_r}$

$d\vec{\mathcal{M}}_{i,e}^{(O_1)} = \vec{O_1M} \wedge d\vec{F}_{ie}$ avec $\vec{O_1M} = \ell \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})}$

$$d\vec{\sigma}_{i,e} = \ell \begin{pmatrix} +\sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \frac{m}{L} \times dl \times \ell \sin\alpha \times \omega^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{m\ell^2}{L} \sin\alpha \, \omega^2 dl \begin{pmatrix} 0 \\ +\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{\sigma}_{ie}(M) = \frac{m}{L} \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \, \ell^2 dl \, \vec{e_0}$$

$$\vec{\sigma}_{ic} = \int_{\text{tige}} d\vec{\sigma}_{ie} = -\int_0^L \frac{m}{L} \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \, \ell^2 dl \, \vec{e_0}$$

$$\vec{\sigma}_{ie} = -\frac{1}{3} m L^2 \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \, \vec{e_0}$$

$$\sigma_{\Delta ic} = \vec{\sigma}_{ie} \cdot \vec{u} \Rightarrow \sigma_{\Delta, ie} = \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha$$

2.2/ Voir 1.2. avec $\sigma_{\Delta ie} \neq 0$

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\alpha} + mg \frac{L}{2} \sin\alpha - \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin\alpha - \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha = 0}$$

Pos d'éq :

$$\alpha = \alpha_{eq} = cste \Rightarrow \ddot{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ (\pi) \\ \omega_0^2 - \omega^2 \cos\alpha_{eq} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha_{eq} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{cases}$$

existe ssi $\underbrace{\omega \geq \omega_0}_{\omega_c}$

Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \alpha_{eq} = 0$

$\omega > \omega_0 \Rightarrow \alpha_{eq} > 0$) stable

Rem : $\alpha = 0$ devient instable pour $\omega > \omega_0$

2.3/ $\alpha_{eq} = \pm\arccos\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$ si $\omega \geq \omega_0$

2.4/ $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \alpha_{eq} = \pm\frac{\pi}{2}$, Hyp : $\alpha_{eq} > 0$